正値作用素の平均の準線型化について (正規作用素に関連した線型作用素)

久保, 文夫

数理解析研究所講究録
399巻 1980年 75-87

正値作用素の平均の準線型化について

北大 応電研 久保文夫

1. Introduction. 作用素の平均演算の研究は回路網の接続理論に始まります. 2つの抵抗, α 及び β の接続の仕方としては, 直列と並列の2つがあります. この合成抵抗がそれぞれ $\alpha+\beta$, $(\alpha^{-1}+\beta^{-1})^{-1}$ となる事は, Ohm と Kirchhoff の法則の結果です.

多端子対を持つ回路網の特性は, 行列や Hilbert space 上の linear operator などによって表現されます. 特に抵抗のみを含む(とみなせる)回路網の特性は positive semidefinite bounded linear operator で表現されます.

1969年に Anderson と Duffin とはこのような回路網の並列接続の合成抵抗を表現する事に成功しました. それは並列接続に因んで, positive operators の **parallel sum** (並列和) と呼ばれています. それは後にいろいろな特徴付けがなされましたが, ここでは $A_\varepsilon = A + \varepsilon I$ $(\varepsilon > 0)$ のよう

にして

$$A:B = \text{s-lim}\,(A_\varepsilon^{-1} + B_\varepsilon^{-1})^{-1} \quad ; \quad \varepsilon \downarrow 0,$$

によって定義しておきます。

上のような回路網の直列接続には通常の operators の和 $A+B$ が対応します。 これらの2つの"和"は次の正規化により調和平均及び算術平均となります：

$$A!B = 2(A:B) \qquad (\text{調和平均})$$

$$A\nabla B = (A+B)/2 \qquad (\text{算術平均}).$$

これらに対応する幾何平均の概念は作用素環論からやって来ました。 1975年の Pusz と Woronowicz とによる幾何平均の定義は 1978年安藤により次の形に reformulate されました：

$$A\#B = \text{s-lim}\, B_\varepsilon^{1/2}(B_\varepsilon^{-1/2} A_\varepsilon B_\varepsilon^{-1/2})^{1/2} B_\varepsilon^{1/2} \ ; \ \varepsilon \downarrow 0.$$

これら基本的平均の重要な不等式群は 1978年安藤により整備されました。

ここでもう一度，回路接続の事に話題を戻しましょう。 2つの抵抗 α, β の並列接続に単位電流 1 が流れる時，α 及び β に流れる電流をそれぞれ x 及び y とおきます。 この合成抵抗の消費するエネルギーは $\alpha x^2 + \beta y^2$ と書くことができます。 ここで電流 x, y は $x+y=1$ という線型な constraint を持っています。 合成抵抗は消費するエ

ネルギーが最小のところにおちつくので次のように書けます.

$$(\alpha^{-1}+\beta^{-1})^{-1} = \min\{\alpha x^2+\beta y^2 \ ; \ x+y=1\}.$$

これは Bellman の動的計画法の一例で, Quasilinearization (準線型化) と呼ばれています.

この準線型化の自然な operator 版は Anderson 達の次の spatialな等式です:

$$\langle (A:B)x|x\rangle = \inf\{\langle Ay|y\rangle+\langle Bz|z\rangle \ ; \ x=y+z\}.$$

この等式の space-free な一般化や, 幾何平均, 更には shorted operation の space-free な準線型化を実行する事が本文の目的です. 第3節においてこれらの結果は作用素環の言葉で単純に述べられる一つの定理に包括されてしまう事が示されます. 最後の節で shorted operation が平均の理論で果たす重要性が示されます. これらの準備として次の節では(2節)久保と安藤とによる operators の mean (平均)の理論を概観します.

2. Means. 今迄に現れた3つの基本的平均が共通して持っている性質から次の4つを抽象します.

(I) $0 \leqq A \leqq B, \ 0 \leqq C \leqq D \implies 0 \leqq A\sigma C \leqq B\sigma D,$

(II) $C(A\sigma B)C \leqq (CAC)\sigma(CBC)$

(III) $A_n \downarrow A, \ B_n \downarrow B \Rightarrow A_n\sigma B_n \downarrow A\sigma B,$

(IV) $A \sigma A = A.$

ここに A, B, C, D, A_n 及び B_n は全て positive (semidefinite) operator です.

> 定義. Positive (semidefinite) operators の間の binary operation σ で
>
> (I), (II), (III) をみたすものを connection
>
> (I), (II), (III), (IV) 〃 mean
>
> と呼ぶ.

この一見人工的な定義は, operator-monotone functions の解析的理論と結びついて一つの興味深い対象を与えます. ここで, 連続函数 $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}$ は

$$0 \leqq A \leqq B \quad \Rightarrow \quad 0 \leqq f(A) \leqq f(B)$$

をみたす時に operator-monotone と呼ばれます.

connection の集合 $\mathfrak{M}$ には自然な order や positive linear combination が次の様に定義できます:

$$\sigma \leqq \tau \iff {}^{\forall}A, B \geqq 0; \quad A \sigma B \leqq A \tau B$$

$$A(x\sigma + y\tau)B = x(A\sigma B) + y(A\tau B) \qquad {}^{\forall}A, B \geqq 0.$$

定理を述べる為に次の記号を定義しておきます:

$$\mathcal{L} = \{ f : (0, \infty) \to \mathbb{R} \ : \text{operator-monotone} \}$$

$$\mathcal{R} = \{ m : \text{positive Radon measures on } [0, \infty] \}$$

$$\mathfrak{M}_1 = \{ \sigma \in \mathfrak{M} \ ; \ \sigma : \text{mean} \}$$

$$\mathcal{L}_1 = \{ f \in \mathcal{L} ; \quad f(1) = 1 \}$$

$$R_1 = \{ m \in R ; \quad m([0,\infty]) = 1 \} .$$

定理1. 次の対応によって $\mathcal{L}$ と $\mathfrak{M}$ とは互に affine order isomorphic, $\mathfrak{M}$ と R とは互に affine isomorphic である. 特に $\mathcal{L}_1$ と $\mathfrak{M}_1$ とは affine order isomorphic, $\mathfrak{M}_1$ と R_1 とは affine isomorphic である:

$$f(x) = I \sigma x I$$

$$A \sigma B = \text{s-lim}\ B_\varepsilon^{1/2} f(B_\varepsilon^{-1/2} A_\varepsilon B_\varepsilon^{-1/2}) B_\varepsilon^{1/2} ; \quad \varepsilon \downarrow 0$$

$$(*) \qquad A \sigma B = aA + bB + \int_0^\infty (tA : B) \frac{1+t}{t}\, dm(t),$$

但し $a = m(\{0\})$, $b = m(\{\infty\})$ とする.

connection と Radon measure の間の isomorphism を与えている関係 (*) は, どの connection も parallel sum の infinite series sum (integration) で表わせる事, 即ち適当にトランスを挿入してその並列と直列の2つの接続で実現できる事を示しています. 従って parallel sum のいろいろな性質が connections 全体に遺伝します. 例えば次の不等式ですが これらは数学的にも回路網の見地からも重要と思われます.

(i) $\quad (A:B)\sigma(C:D) \leq (A\sigma C):(B\sigma D) \leq (A\sigma C) + (B\sigma D) \leq (A+B)\sigma(C+D),$

(ii) $\quad T^*(A\sigma B)T \leq (T^*AT)\sigma(T^*BT).$

operator-monotone function f に対して

$$f^*(x) = f(x^{-1})^{-1}$$

によって定義される函数 f^* もまた operator-monotone です. 今 connection σ が f に定理1の意味で対応する時, f^* に対応する connection を σ^* で表わし, σ^*, f^* をそれぞれ σ, f の <u>harmonic reflection</u> と呼ぶ事にします. A, B を inverse を持つ positive operators とすると次のような関係があります.

$$A\sigma^*B = (A^{-1}\sigma B^{-1})^{-1}.$$

また, $\nabla^* = !$, $\#^* = \#$, $(\sigma^*)^* = \sigma$ です.

3. Quasilinearizations. 以下で用いる作用素環論の用語は 竹崎の教科書に従う事にします. 先ず conditional expectations の harmonic reflection を定義します.

Φ を C^*-algebra $\mathfrak{A}$ からその W^*-subalgebra $\mathfrak{B}$ の上への conditional expectation とします. $\mathfrak{A}$ の positive element A に対し $A_\varepsilon = A + \varepsilon I_{\mathfrak{A}}$ は $\mathfrak{A}$ の中た inverse を持ち $A_\varepsilon^{-1} \geqq \delta I_{\mathfrak{A}}$ となる $\delta > 0$ が存在します. 従って $\Phi(A_\varepsilon^{-1}) \geqq \delta I_{\mathfrak{B}}$ となり $\Phi(A_\varepsilon^{-1})$ は $\mathfrak{B}$ の中に inverse を持ち, 更に $0 < \varepsilon < \varepsilon' \Longrightarrow 0 \leqq \Phi(A_\varepsilon^{-1})^{-1} \leqq \Phi(A_{\varepsilon'}^{-1})^{-1}$ をみたします. 従って $s\text{-}\lim \Phi(A_\varepsilon^{-1})^{-1}$; $\varepsilon \downarrow 0$ が存在します. この limit を単に $\Phi(A^{-1})^{-1}$ と書き, Φ の **<u>harmonic reflection</u>** と呼ぶ事にします. harmonic reflection については，次の定理が全ての基本となります．

> 定理 2.　$\mathfrak{A}$ の positive element A に対して
> $$\Phi(A^{-1})^{-1} = \inf\{\Phi(C^*AC);\ \Phi(C) = I_{\mathfrak{B}}\}.$$

証明．　A の替りに A_ε を考える事により A が inverse を持つ positive element と仮定して充分です．　conditional expectation の 2-positivity により $\begin{bmatrix} A^{-1} & C \\ C^* & C^*AC \end{bmatrix} \geqq 0$ から $\begin{bmatrix} \Phi(A^{-1}) & \Phi(C) \\ \Phi(C)^* & \Phi(C^*AC) \end{bmatrix} \geqq 0$ が従い，　$\Phi(C) = I_{\mathfrak{B}}$ とすると

$$\Phi(A^{-1})^{-1} \leqq \Phi(C^*AC)$$

となります．　一方 $C = A^{-1}\Phi(A^{-1})^{-1}$ は $\Phi(C) = I_{\mathfrak{B}}$ をみたし上の minimum を与えます．　///

2 by 2 の scalar matrix の algebra M_2 の normalized trace $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto (a+d)/2$ の slice map $\tau_2 : M_2 \otimes B(\mathcal{H}) \longrightarrow B(\mathcal{H})$; $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \mapsto (A+D)/2$ を考えると調和平均，従って parallel sum の operator 版 quasilinearization が得られます．

> 系 3.
> $$A : B = \inf\{C^*AC + D^*BD;\ C + D = I_{\mathcal{H}},\ C, D \in B(\mathcal{H})\}.$$

また任意の orthogonal projection $P \in B(\mathcal{H})$ に対して Shimbrot の意味の generalized Wiener-Hopf operator Φ_P が考えられます: $\Phi_P : B(\mathcal{H}) \longrightarrow B(P\mathcal{H})$; $X \longmapsto PXP$. Φ_P は $B(\mathcal{H})$ から $B(P\mathcal{H})$ の上への conditional expectation で定理2の系として shorted operation の operator 版 quasilinearization が得られます. P の値域を $\mathfrak{M}$ とする時, positive operator $A \in B(\mathcal{H})$ の $\mathfrak{M}$ への <u>shorted operator</u> $A_{\mathfrak{M}} \in B(\mathfrak{M})$ は $\mathcal{H} = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M}^{\perp}$ として

$$\begin{bmatrix} A_{\mathfrak{M}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{12}^{*} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

によって定義されます. 但し $A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^{*} & A_{22} \end{bmatrix}$ on $\mathcal{H} = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M}^{\perp}$ としておきます.

系4.

$$A_{\mathfrak{M}} = \Phi_P(A^{-1})^{-1} = \inf\{PC^{*}ACP \ ; \ PCP = P,\ C \in B(\mathcal{H})\}.$$

更に幾何平均を含め他の operator-mean を準線型化しましょう. $[0,1]$-区間上の $B(\mathcal{H})$-valued continuous functions 全体のつくる C^{*}-algebra を C^{*}-tensor product $C[0,1] \otimes B(\mathcal{H})$ と同一視し, $[0,1]$-区間上の normalized positive Radon measure を m とします. m は slice map Φ_m: $\Phi_m(F) = \int_0^1 F(t)\,dm(t)$ によって $C[0,1] \otimes B(\mathcal{H})$ から $B(\mathcal{H})$ の上への conditional expectation

をつくります． 特に $F_{A,B}(t) = (1-t)A + tB$ を $C[0,1] \otimes B(\mathcal{H})$ の元とみなすと次の対応関係が得られます．

定理5． mean の全体 $\mathfrak{M}_1$ と $[0,1]$-区間上の normalized positive Radon measure の全体 $C[0,1]^*_{+,1}$ とは次の対応で bijective である． $$A \sigma B = \Phi_m(F_{A,B}^{-1})^{-1}.$$

証明． m から上の対応で得られた binary operation σ が mean となる事は易く示せます． 逆に σ を mean とし その harmonic reflection σ^* の representing measure を n とします． $dm(t) = dn(t/(1-t))$ と変換して

$$A\sigma^* B = \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{1+t} A^{-1} + \frac{t}{1+t} B^{-1} \right\}^{-1} dn(t)$$

$$= \int_0^1 \{ (1-t)A^{-1} + t B^{-1} \}^{-1} dm(t),$$

従って $A \sigma B = \Phi_m(F_{A,B}^{-1})^{-1}$ を得ます． ///

特に調和平均，幾何平均の representing measure は次のように与えられます：

$$A ! B = \left(\int_0^1 F_{A,B}^{-1} \, d(\delta_0 + \delta_1)(t) \right)^{-1}$$

$$A \# B = \left(\int_0^1 F_{A,B}^{-1} \, (dt / \pi t^{1/2}(1-t)^{1/2}) \right)^{-1}$$

但し δ_t は t における Dirac の point measure とします.

定理2と定理5より mean の準線型化の operator 版と vector 版とが得られます.

> 系6. σ を mean とする.
>
> $$A\sigma B = \inf\left\{\int_0^1 C(t)^* F_{A,B}(t)\, C(t)\, dm(t)\ ;\ C\in C[0,1]\otimes B(\mathcal{H}),\ \int_0^1 C(t)\, dm(t) = I_{\mathcal{H}}\right\}.$$
>
> $$\langle (A\sigma B)x|x\rangle = \inf\left\{\int_0^1 [(1-t)\langle Ax(t)|x(t)\rangle + t\langle Bx(t)|x(t)\rangle]\, dm(t);\ x(\cdot)\in C[0,1]\otimes\mathcal{H},\ \int_0^1 x(t)\, dm(t) = x\right\}.$$

4. Means と Shorted operations. 前節では shorted operation を Wiener-Hopf operator の harmonic reflection としてとらえました. 逆にここでは, conditional expectation の harmonic reflection が一種の shorted operation に他ならぬ事を示します.

Φ を C^*-algebra $\mathfrak{A}$ からその W^*-subalgebra $\mathfrak{B}$ の上への conditional expectation とします. $\mathfrak{B}$ の作用している Hilbert space を $\mathcal{H}$ としておきましょう.

Φ は completely positive なので Stinespring-Umegaki の定理により

$$\Phi(X) = \Phi_P(\pi(X)) \qquad X\in\mathfrak{A}$$

のように，表現$(\pi, \mathcal{K})$及び$B(\mathcal{K})$から$B(\mathcal{H})$の上への generalized Wiener-Hopf operator Φ_Pの積に factorize されます． πは表現ですから$\pi(A_{\mathcal{K}}^{-1})^{-1} = \pi(A)_{\mathcal{K}}$となり，結局

$$\Phi(A^{-1})^{-1} = \pi(A)_{\mathcal{H}}$$

と書けます．

調和平均はτ_2の harmonic reflection で表されましたから，

$$A!B = \tau_2\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}^{-1}\right)^{-1} = \pi\left(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}\right)_{\mathcal{H}}$$

のように，また更に一般の mean もまた

$$A\sigma B = \Phi_m\left(F_{A,B}^{-1}\right)^{-1} = \pi(F_{A,B})_{\mathcal{H}}$$
$$= (F_{\pi(A),\pi(B)})_{\mathcal{H}}$$

のように表わせます． 従って mean とは(A, B)の適当な表現と shorted operation の合成となっています． これは operator-mean が，Anderson 達の cascade sum, hybrid sum などのいわゆる router sum とある種の類似が存在する事を示しています．

REFERENCES

W.N.ANDERSON,JR., Shorted operators, SIAM J.Appl.Math. 20 (1971), 520-525.

W.N.ANDERSON,JR. and R.J.DUFFIN, Series and parallel addition of matrices, J.Math.Anal.Appl. 26 (1969) 576-594.

T.ANDO, Topics on Operator Inequalities, Lecture Note, Sapporo 1978.

R.BELLMAN, Dynamic Programming, Princeton Univ.Press, Princeton, New Jersey 1957.

F.KUBO, Conditional expectations and operations derived from network connections, to appear in J.Math. Anal.Appl.

F.KUBO and T.ANDO, Means of positive linear operators, Math.Ann. 246 (1980) 205-224.

W.PUSZ and S.L.WORONOWICZ, Functional calculous for sesquilinear forms and the purification map, Rep.Math.Phys. 8 (1975), 159-170.

M.SHINBROT, On the range of general Wiener-Hopf operators, J.Math.Mech. 18 (1969), 587-601.

W.F.STINESPRING, Positive functions on C*-algebras, Proc. Amer.Math.Soc. 6 (1055), 211-216.

M.TAKESAKI, Theory of Operator Algebras I, Springer-Verlag, New York, 1979.

H.UMEGAKI, Positive definite function and direct product Hilbert space, Tohoku Math.J. 7 (1955), 206-211.